Schallausbreitung in einer Region heißen Gases mit Hilfe der DRBEM

Dr.-Ing. Rafael Piscoya, Prof. Dr.-Ing. Martin Ochmann
Fachbereich II, Forschungsschwerpunkt: Numerische Akustik

Kurzfassung
Die Ausbreitung von Schallwellen in einem nicht-uniformen Medium kann mit einer Standard-Randelementmethode nicht bestimmt werden, da sie auf der homogenen Helmholtz-Gleichung basiert. Wenn die entsprechende Transport-Gleichung wie eine inhomogene Helmholtz-Gleichung mit Quelltermen auf der rechten Seite umgeschrieben wird, taucht ein Volumenintegral von Quelltermen in der Integralform der Differentialgleichung auf. In der vorliegenden Arbeit wird die *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM) zur Ermittlung des Volumenintegrals mittels Flächenintegralen angewendet, um den hohen Rechenaufwand, der mit der Berechnung des Volumenintegrals verbunden ist, zu vermeiden. Die Schallabstrahlung einer akustischen Quellverteilung innerhalb eines Volumens heißen Gases umgeben von Luft bei Raumtemperatur wird mit dieser Methode berechnet. Ein Vergleich der Ergebnisse der DRBEM mit der analytischen Lösung dient zur Auswertung dieser Methode.

Abstract
The propagation of sound waves in a non uniform medium cannot be determined using a standard boundary element method since it is based on the homogeneous Helmholtz equation. When the corresponding transport equation is written as an inhomogeneous Helmholtz equation with source terms on the right hand side, the integral form of the differential equation includes a volume integral of the source terms. In this work, the *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM) is used to compute the volume integral using surface integrals alone to avoid the high computational costs of solving a volume integral. The method is used to calculate the sound radiation of a certain acoustic source distribution within a volume of hot gas surrounded by air at ambient temperature. A comparison of the results of the DRBEM with the analytical solution of this configuration serves to evaluate this method.

Einleitung

Ein simples Modell einer Flamme besteht aus einem kugelförmigen Volumen heißer Luft mit einer gewissen Quellverteilung, umgeben von Luft bei Raumtemperatur [1]. Wenn die Quellverteilung nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, kann das 3D-Problem auf ein eindimensionales Problem reduziert und für spezifische Quellverteilungen analytisch gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit wird die DRBEM in ein numerisches Verfahren überführt, um das Volumenintegral der Quellfunktion mit geringem Rechenaufwand auswerten zu können. Die Genauigkeit der Methode wird durch den Vergleich der Ergebnisse mit der analytischen Lösung überprüft. In weiteren Arbeiten soll diese Methode auch auf Quellverteilungen mit beliebiger Geometrie angewandt werden. Eine ausführlichere Darstellung dieser Arbeit findet man in [4].

1. Problembeschreibung

Das Flammenmodell besteht aus einem kugelförmigen Volumen heißer Luft mit Radius a, Dichte ρ_1, Schallgeschwindigkeit c_1 und einer (frequenzabhängigen) Schallquellverteilung Q_ω. Die Flamme ist von Luft mit den Konstanten ρ_0 und c_0 umgeben
Zur Bestimmung der Schallabstrahlung wird der Raum in zwei Regionen aufgeteilt und die Helmholtz-Gleichung in jeder Region gelöst [1]

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 + k_1^2\right)p_I &= Q_\omega \quad \text{Region I} \\ \left(\nabla^2 + k_0^2\right)p_{II} &= 0 \quad \text{Region II} \end{aligned} \tag{1}$$

mit den Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
p_I &= p_{II} &&, \quad r = a \\
\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_I}{\partial r} &= \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_{II}}{\partial r} &&, \quad r = a
\end{aligned}
\tag{2}
$$

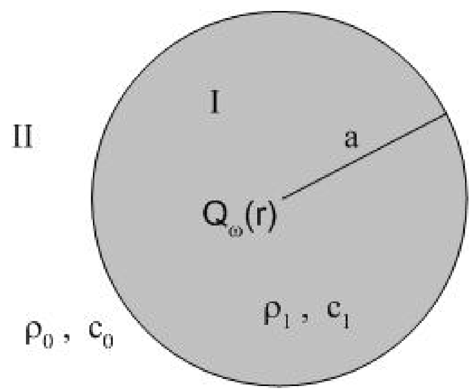

Abbildung 1: Schallquellen in einem kugelsymmetrischen Volumen heißen Gases.

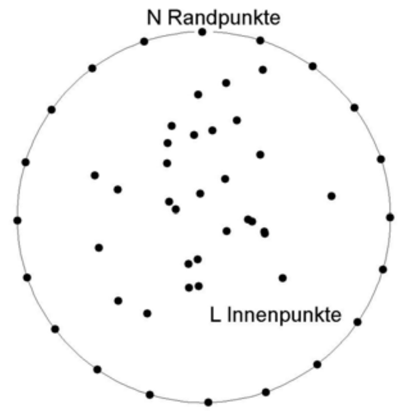

Abbildung 2: Diskretisierungspunkte der DRBEM

2. Analytische Lösung

Für spezielle Q_ω kann das Problem analytisch gelöst werden. Wir analysieren den Fall Q_ω=-Q, mit Q konstant über die Frequenz. Die Lösung für diesen Fall ist:

$$
\begin{aligned}
p_I &= Q(Aj_0(k_1 r) - 1)/k_1^2 && r \le a \\
p_{II} &= Te^{-jk_0 r}/r && r \ge a
\end{aligned}
\quad , \tag{3}
$$

wobei die Konstanten A und T durch die Randbedingungen (2) bestimmt werden.

3. Anwendung der DRBEM

Wie in den Randelementeverfahren üblich, werden die Differentialgleichungen (1) in Integralform überführt:

$$
\begin{aligned}
C_I p_I &= -\int_S \left(p_I^S \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial p_I^S}{\partial r} g_1 \right) dS + \int_V Q g_1 dV \\
C_{II} p_{II} &= \int_S \left(p_{II}^S \frac{\partial g_0}{\partial r} - \frac{\partial p_{II}^S}{\partial r} g_0 \right) dS
\end{aligned}
\tag{4}
$$

mit

$$
g_0 = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \;,\; g_1 = \frac{e^{-jk_1 R}}{4\pi R} \;,\; R = \left|\vec{x} - \vec{y}\right| ,\; C_I = \begin{cases} 1 & r < a \\ 0.5 & r = a \\ 0 & r > a \end{cases} ,\; C_{II} = \begin{cases} 0 & r < a \\ 0.5 & r = a \\ 1 & r > a \end{cases} ,\; r = \left|\vec{x}\right| .
$$

Mittels der DRBEM wird das Volumenintegral über die Schallquellverteilung in Gl. (4) in eine Reihe von Flächenintegralen umgeformt, um den Rechenaufwand zu reduzieren.
Die Quellverteilung Q wird hierfür in eine Reihe von Funktionen entwickelt

$$
Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(\vec{x}) \quad , \tag{5}
$$

wobei N die Anzahl von Punkten am Kugelrand und L die Anzahl von Punkten im Inneren des Volumens ist (Abb. 2). Grundsatz der Methode ist nun, dass den Funktionen f_j Funktionen ψ_j zugeordnet werden, die die Helmholtz-Gleichung lösen:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi_j = f_j \quad . \tag{6}$$

Die erneute Anwendung des Randelementeverfahrens auf Gl. (6) führt zu folgender Darstellung:

$$-\int_V f_j g dV = C_I \psi_j + \int_S \left(\psi_j^S \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial \psi_j^S}{\partial r} g \right) dS \quad . \tag{7}$$

Setzt man (7) und (5) in (4) ein, so werden die Integralgleichungen allein in Form von Flächenintegralen geschrieben:

$$C_I p_I = -\int_S \left(p_I^S \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial p_I^S}{\partial r} g_1 \right) dS + \sum_j \alpha_j \left(C_I \psi_j + \int_S \left(\psi_j \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_j}{\partial r} g_1 \right) dS \right) \tag{8}$$

Nähere Details der Methode sind in [2] aufgeführt.

4. Ergebnisse

Es gibt mehrere Alternativen für die Wahl der Funktionen f_j und ψ_j, die jeweils von der Form des Quellterms Q_ω abhängen. In dieser Arbeit wurde folgende Wahl getroffen [3]:

$$f_j(\vec{x}) = 1 + r_j \quad , \quad r_j = \left| \vec{x} - \vec{y}_j \right|$$

$$\psi_j(\vec{x}) = \frac{1 + r_j}{k^2} - \frac{2}{k^4} \left(\frac{1 - \cos(k r_j)}{r_j} \right) \quad . \tag{9}$$

Das Kugelmodell bestand aus 640 Elementen. Es wurden 200 Punkte gewählt, die innerhalb der Kugel liegen.

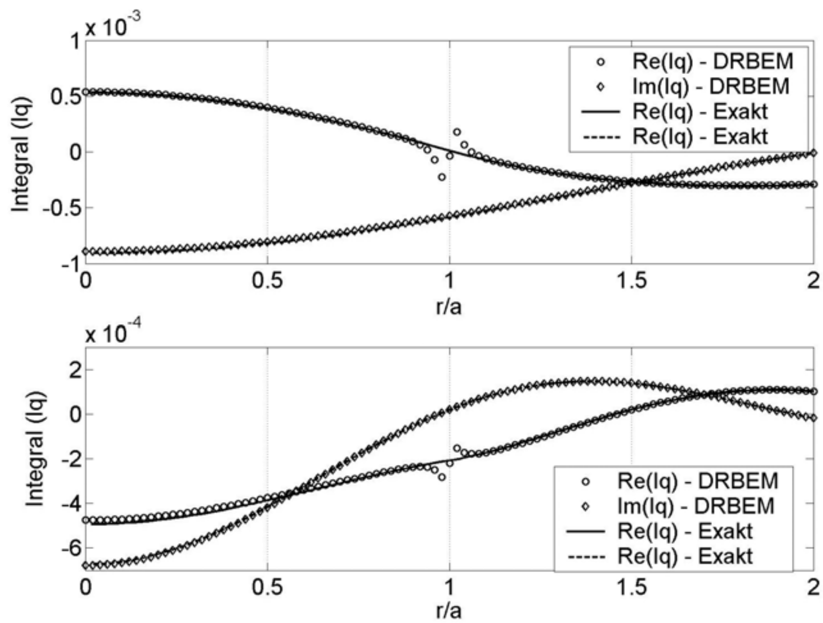

Abbildung 3: Volumenintegral über dem Radius a.

Abb. 3 zeigt einen Vergleich zwischen den analytischen und den numerischen Werten des Volumenintegrals in mehreren Punkten innerhalb und außerhalb der Kugel und Abb. 4 einen entsprechenden Vergleich für den Schalldruck. Die Übereinstimmung zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen ist sehr gut. Nur in der Nähe der Trennfläche zwischen Region I und II ist die Genauigkeit der Berechnung nicht optimal, möglicherweise wegen des steilen Sprungs von C_I, aber der Fehler bleibt klein unmittelbar im Punkt r=a, was zu einer guten Bestimmung der Schallleistung führt (Abb. 5).

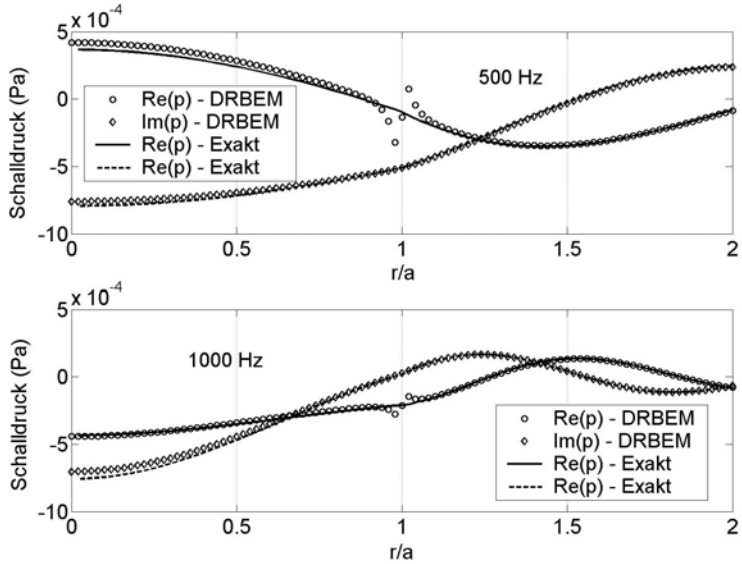

Abbildung 4: Schalldruck über dem Radius a.

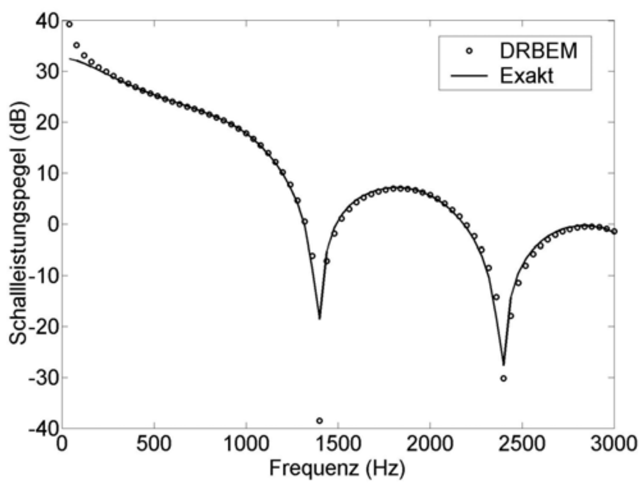

Abbildung 5: Schallleistungspegel über der Frequenz.

Literatur

[1] Crighton, D.G.: Modern methods in analytical acoustics, Chapter 13. Springer-Verlag, London, Berlin, 1992.

[2] Partridge P.W., Brebbia C.A.: Computer Implementation of the BEM dual reciprocity method for the solution of general field equations. Communications in Applied Numerical Methods 6 (1990), 83-92

[3] Perrey-Debain E.: Analysis of convergence and accuracy of the DRBEM for axisymmetric Helmholtz-type equation. Engineering Analysis with Boundary Elements 23 (1999) 703–711.

[4] Piscoya R., Ochmann M.: Sound propagation in a region of hot gas using the DRBEM. Proceedings of the 14th International Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia (2007).

Kontakt:

Dr. Ing. Rafael Piscoya
FB II Mathematik, Physik, Chemie
Technische Fachhochschule Berlin
Luxemburger Strasse 10
13353 Berlin
Tel.: (030) 4504 2804
E-mail: piscoya@tfh-berlin.de

Prof. Dr.-Ing. Martin Ochmann
FB II Mathematik, Physik, Chemie
Technische Fachhochschule Berlin
Luxemburger Strasse 10
13353 Berlin
Tel.: (030) 4504 2931
E-mail: ochmann@tfh-berlin.de