

Die Quellsimulationstechnik mit komplexen Quellorten zur Berechnung von Schallfeldern mit starker Richtcharakteristik

Dr.-Ing. Rafael Piscocoy, Prof. Dr.-Ing. Martin Ochmann

Kurzfassung

Die Quellsimulationstechnik ist eine wohlbekannt Methode zur Bestimmung der Schallabstrahlung oder Schallstreuung von Strukturen in den drei-dimensionalen Raum. Die Grundidee besteht darin, den schwingenden Körper durch ein System von im Körperinneren liegenden Quellen zu ersetzen. Legt man nun die zugehörigen Koordinaten der Quellorte in das Komplexe, so weisen die so modifizierten Punktquellen eine ausgeprägte Richtcharakteristik. Ergänzt man daher das von der Quellsimulationstechnik verwendete Quellsystem um derartige komplexifizierte Monopole, so müssten sich beispielsweise stark fokussierte Schallfelder effektiver und stabiler berechnen lassen. Mittels der erweiterten Quellsimulationstechnik wird die Schallabstrahlung eines in einer schallharten Wand eingebetteten Kreiskolbens untersucht.

Abstract

The Source Simulation Technique is a well-known method to determine the sound radiation or scattering from structures into the three-dimensional space. The basic idea consists in replacing the vibrating structure by a system of acoustical sources placed in the interior of the structure. If the coordinates of the source positions are shifted from real values into the complex plane, the corresponding monopoles possess a distinctive directivity pattern. Therefore, by adding such complex source point solutions to the system of equivalent sources, a strongly focused sound field should be computed in a more efficient and stable way. The extended source simulation technique is applied to calculate the sound field radiated from a circular baffled piston.

Einleitung

Der Grundbaustein der Quellsimulationstechnik mit komplexen Quellorten (auch komplexe Ersatzstrahlermethode mit Abkürzung CESM genannt) ist ein Monopol oder eine Punktquelle, deren Position kein reeller, sondern ein komplexer Punkt im Raum ist. Im ersten Abschnitt werden die Eigenschaften eines solchen elementaren Strahlers, ab hier „komplexer Monopol“ genannt, untersucht. Es wird gezeigt, dass solche Quellen sich anders verhalten, als die üblichen reellen Quellen. Beispielsweise ist die Singularität des komplexen Monopols nicht mehr ein Punkt, sondern dehnt sich auf einem ganzen Kreis aus. Die CESM wird im zweiten Abschnitt kurz beschrieben. Sie unterscheidet sich hauptsächlich von der üblichen Quellsimulationstechnik dadurch, dass sie Quellen in komplexen Positionen verwendet. Theorie, Numerik und Anwendungen der Quellsimulationstechnik oder Ersatzstrahlermethode in ihrer Standardform findet man in [3]. Komplexe Quellorte können auch in einem BEM Code miteinbezogen werden, um die Wirkung eines Bodens mit endlicher Impedanz zu beschreiben [4]. Schließlich wird im dritten Abschnitt die Schallabstrahlung eines Kreiskolbens mit der CESM berechnet und dargestellt. Bei hohen Frequenzen strahlt der Kolben den Schall stark fokussiert in Achsenrichtung ab und ist daher ein geeignetes Testbeispiel für die Wirksamkeit der Methode.

1. Monopol mit komplexem Quellort

Ein akustischer Monopol am Quellort $\vec{y} = (x_s, y_s, z_s)$ wird im Frequenzbereich beschrieben durch den Ausdruck

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = A \exp(-jkR)/(4\pi R) \quad (1)$$

mit $R = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$.

Hierbei ist A die komplexe Amplitude, $k = \omega/c$ ist die Wellenzahl mit Kreisfrequenz ω und c ist die Schallausbreitungsgeschwindigkeit. Alle Wechselgrößen sollen der Zeitkonvention $\exp(j\omega t)$ mit $j = \sqrt{-1}$ gehorchen. $g(\vec{x}, \vec{y})$ ist die Greensche Funktion im freien Raum und löst die inhomogene Helmholtz-Gleichung:

$$\Delta g + k^2 g = -\delta(\vec{x}, \vec{y}) \quad (2)$$

wobei Δ der Laplace-Operator und δ die Dirac-Funktion darstellen.

Führt man nun einen komplexen Quellort ein, indem der Quellort imaginäre Anteile erhält

$$\vec{y}_c = (x_s - ja, y_s - jb, z_s - jc) \quad (3)$$

so ist $g(\vec{x}, \vec{y})$ auch weiterhin eine Lösung der Helmholtzgleichung in Bezug auf die räumlichen Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$ für einen festen komplexen Quellort \vec{y}_c .

Die Eigenschaften des komplexen Monopols lassen sich besser beschreiben wenn die Imaginärteile in die Form eines Vektors umgeschrieben werden:

$$\vec{y}_c = \vec{y} - j\vec{\beta} \quad , \quad \vec{\beta} = (a, b, c) \quad (4)$$

Es ist zu beachten, dass die Quellsingularität des komplexen Monopols sich von derjenigen des gewöhnlichen Monopols unterscheidet. Der komplexe Abstand $R = R_r + jR_i$ in (1) wird Null auf dem Kreis

$$C = \{ \vec{x} \text{ in } E / |\vec{x} - \vec{y}| = \beta \} \quad , \quad \beta = |\vec{\beta}|$$

mit Mittelpunkt in $\vec{y} = (x_s, y_s, z_s)$ in der Ebene E , $E = \{ \vec{x} / (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{\beta} = 0 \}$ (siehe Abb. 1).

Weiterhin müssen die komplexen Wurzeln eindeutig definiert werden, und für die Erfüllung der Ausstrahlungsbedingung fordert man dass $\text{Re}\{R\} = R_r \geq 0$. Damit ergibt sich als Singularitätenregion die Scheibe

$$D = \{ \vec{x} \text{ in } E / |\vec{x} - \vec{y}| \leq \beta \} .$$

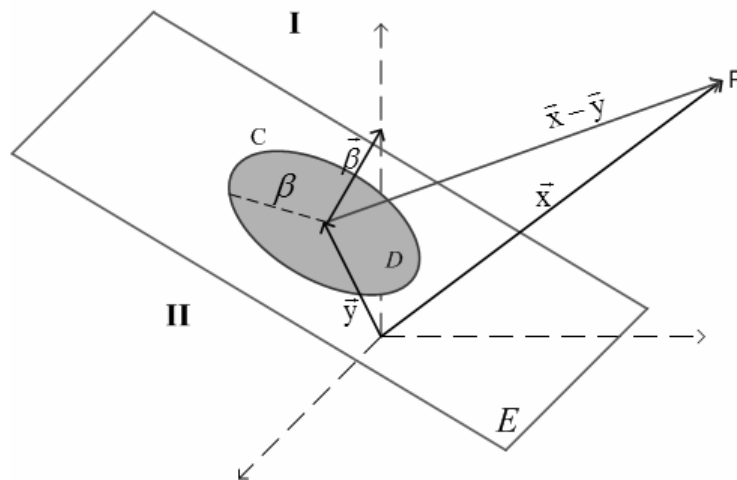


Abb. 1: Komplexer Quellort und seine geometrischen Merkmale.

Die Scheibe D bestimmt eine Ebene, deren Normalvektor durch $\vec{\beta}$ gegeben ist und den Raum in zwei Regionen unterteilt. Oberhalb der Ebene wird die Amplitude der Welle durch den Faktor e^{kR_i} verstärkt, während sie unterhalb der Ebene durch den Faktor $e^{-k|R_i|}$

abgeschwächt wird. Die Werte von R_i zusammen mit dem Faktor e^{kR_i} rufen eine ausgeprägte Richtcharakteristik entlang der Winkelhalbierenden hervor, wenn der Wert von β oder k nicht zu klein ist, die in Gegensatz zur Kugelcharakteristik des normalen Monopols steht. (siehe Abb. 2).

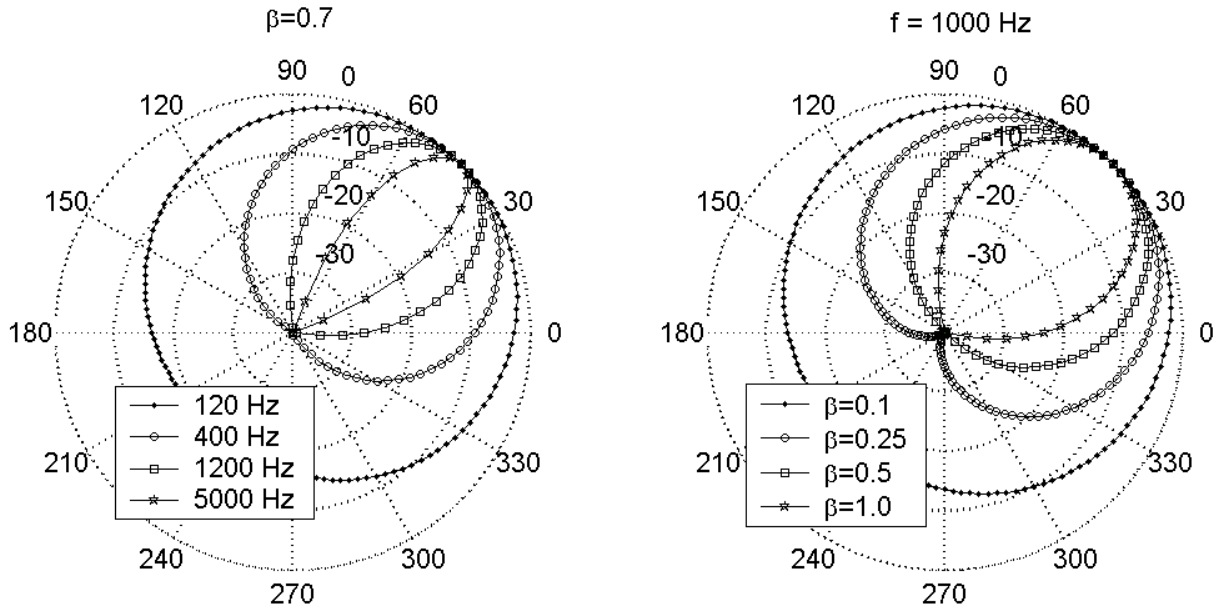


Abb. 2: Richtwirkung des komplexen Monopols für verschiedenen Frequenzen und Werte von β .

2. Die komplexe Quellsimulationstechnik

Die Quellsimulationstechnik oder Ersatzstrahlermethode (Abkürzung: ESM) in ihrer Standardform verwendet Quellen in rein reellen Quellorten (kurz als „reelle Quellen“ bezeichnet). Die Erweiterung der Methode erfolgt nun dadurch, dass wir Quellen mit komplexen Quellorten (kurz als „komplexe Quellen“ bezeichnet) dem Quellsystem hinzufügen. Wir bezeichnen die auf diese Weise ergänzte Methode als komplexe Ersatzstrahlermethode oder komplexe Quellsimulationstechnik (kurz als „CESM“). Die CESM ersetzt also einen schwingenden Körper durch ein System von reellen und komplexen Quellen derart, dass das in den Außenraum abgestrahlte Schallfeld näherungsweise richtig wiedergegeben wird. Da die verwendeten Quellfunktionen die Helmholtz-Gleichung und die Ausstrahlungsbedingung automatisch erfüllt, ist es nur notwendig, dass das Quellsystem der Randbedingung auf der Strukturoberfläche S genügt, um eine genaue Lösung des Abstrahlproblems zu gewinnen. Ein Maß für die Genauigkeit der berechneten Lösung wird durch den integrierten quadratischen Schnellefehler gegeben

$$F_{rel} = \frac{\int_S |v - v_{nS}|^2 dS}{\int_S |v_{nS}|^2 dS}, \quad (5)$$

wobei v_{nS} die vorgegebene Schnelle auf der Struktur und v die aus den Ersatzstrahlern berechnete Schnelle ist. Darüber hinaus ist die Konditionszahl (κ)

$$\kappa = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (\|\cdot\| = \text{Norm}) \quad (6)$$

ein wichtiger Parameter für die Stabilität der numerischen Methode (A ist die Matrix des linearen Gleichungssystems, die durch Diskretisierung der Gleichungen der ESM bzw. CESM entsteht).

In Abhängigkeit von der Problemstellung wird man reelle und komplexe Quellen in geeigneter Weise miteinander kombinieren. Es sind natürlich auch Konfigurationen mit rein komplexen (oder rein reellen) Quellen möglich. Grundsätzlich ist zu beachten, dass sich alle Quellsingularitäten innerhalb des schwingenden Körpers befinden müssen.

3. Berechnungsbeispiel: Kreiskolben

Wir untersuchen die Abstrahlung eines Kreiskolbens, der gleichphasig mit der Normalschnelle v_0 schwingt und in eine unendliche schallharte Wand eingebettet ist. Bei hohen Frequenzen strahlt der Kolben den Schall stark fokussiert in Achsenrichtung ab und ist daher ein geeignetes Testbeispiel für die Wirksamkeit der CESM. Auf der Achse des Kolbens kann der Schalldruck exakt durch

$$p_{Achse}(x) = \rho c v_0 \left(e^{-jk\sqrt{R_p^2 + x^2}} - e^{-jkx} \right) \quad (7)$$

angegeben werden. Eine Näherungslösung für das Fernfeld lautet

$$p_{far}(r, \theta) = \frac{j\rho c k^2 R_p^2 v_0 e^{-jkr}}{2kr} \left[\frac{2J_1(kR_p \sin \theta)}{kR_p \sin \theta} \right] \quad (8)$$

Für die numerischen Berechnungen wurde ein Kreiskolben mit einem Radius $R = 0.1$ m in eine quadratische Schallwand mit einer Seitenlänge von 2 m eingebettet. Das Modell besteht aus 14400 Elementen. Eine Reihe von Rechnungen zeigten, dass ein gut geeignetes Quellsystem aus zehn komplexen Monopolen, die im Abstand von 0.005 m hinter dem Kolben liegen und wachsende Imaginärteile besitzen, besteht (siehe Abb. 3). Um die Vorteile der CESM zu untersuchen wurde auch eine Berechnung mit der gewöhnlichen ESM durchgeführt.

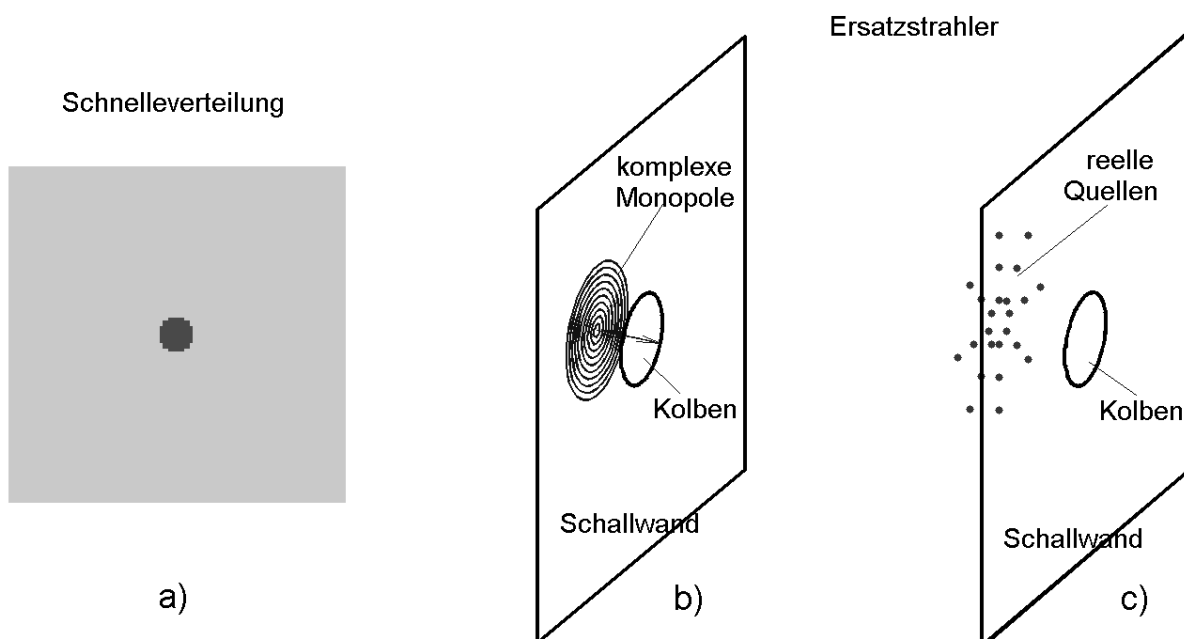


Abb. 3: Verteilung der normalen Schnelle a) und Quellorte b) komplex; c) reell

In Abb. 4 wird der exakte Schalldruck nach Gl. (7) bzw. Gl. (8) auf der Achse und auf einem Kreis von 100 m Radius verglichen mit dem Schalldruck, den das komplexe Quellsystem für zwei Frequenzen vorausberechnet. Die Übereinstimmung ist hervorragend. Bemerkenswert ist auch, dass diese Rechnung 13 Sekunden benötigt, während eine Rechnung mit rein reellen Quellen 300 Sekunden dauert. Um eine vergleichbare Genauigkeit zu erzielen, waren 216 reelle Quellen bestehend aus Monopolen, Dipolen und Quadrupolen an 24 reellen Quellpositionen erforderlich.

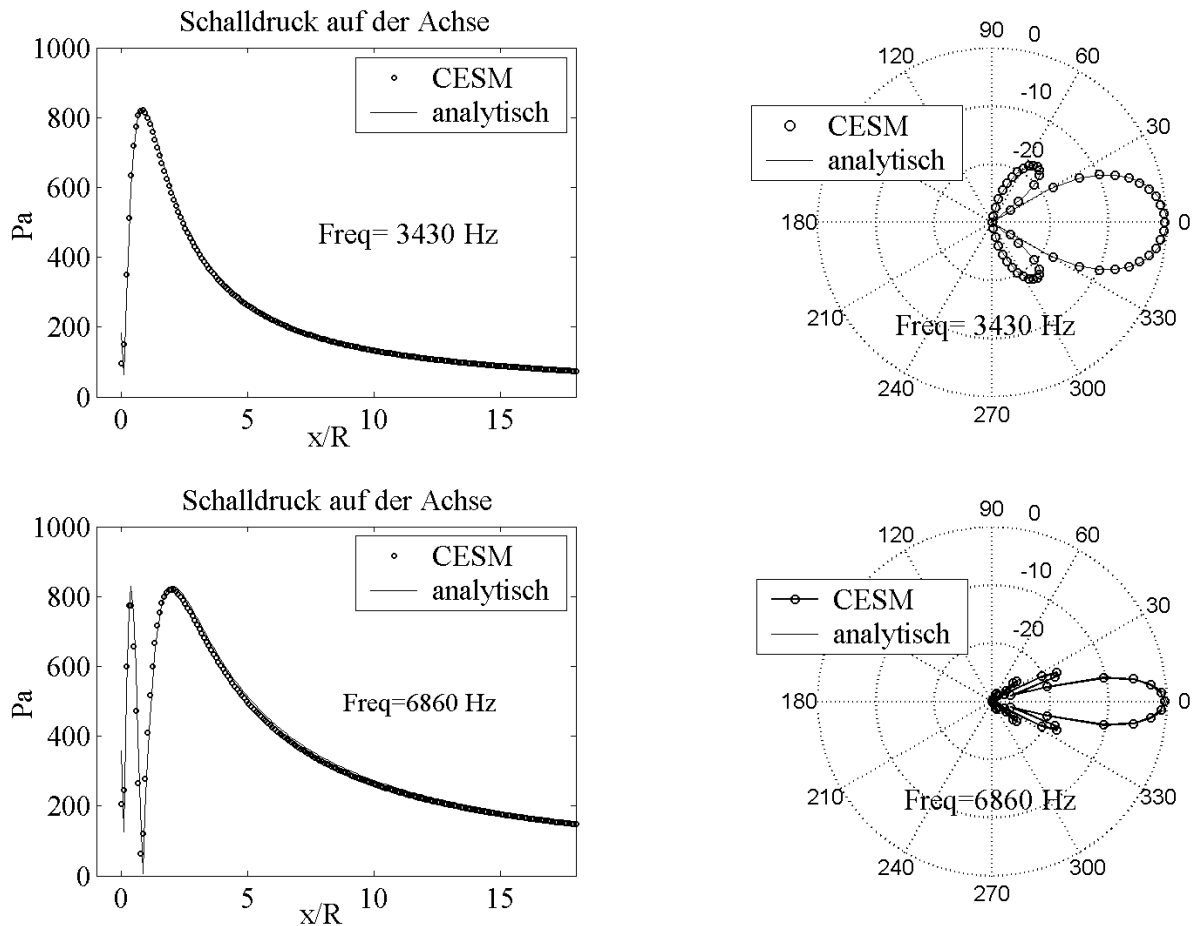


Abb. 4: Vergleich des analytischen Schalldrucks mit den Ergebnissen der CESH auf der Achse und auf einem Kreis im Fernfeld für zwei Frequenzen.

4. Zusammenfassung

Durch die Hinzufügung von komplexen Quellen im äquivalenten Quellsystem der Ersatzstrahlermethode können stark fokussierte Schallfelder, ähnlich wie Schallstrahlen, mit vielversprechender Genauigkeit numerisch simuliert werden. Ebenso reduziert sich die Rechenzeit erheblich. Daher ist die Anwendung der CESH zur Beschreibung solcher Strahler von Vorteil. Diese Ergebnisse wurden teilweise auf der DAGA 06 in Braunschweig [5] und auf dem ICSV13 in Wien [6] vorgestellt. Eine ausführliche Darstellung ist zurzeit in Vorbereitung [7]. Strahler mit komplexeren Geometrien sollen demnächst mit der CESH untersucht werden.

5. Literatur

- [1] Ochmann Martin (2004), "The complex equivalent source method for sound propagation over an impedance plane, J. Acoust. Soc. Am. 116, 3304-3311.
- [2] Ochmann Martin (2005), "Complex source point method for computing the Green's function over an arbitrary impedance plane", Proceedings of the NOVEM 2005, St. Raphael, France.
- [3] Ochmann Martin, Mechel Fridolin (2002), Analytical and Numerical Methods in Acoustics. Chap. O in: F. P. Mechel (Ed.), Formulas of Acoustics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 930 – 1023.
- [4] Brick Haiké, Piscoya Rafael, Ochmann Martin, Költzsch Peter (2006), "A Hybrid LES-BEM Method for the Calculation of Combustion Noise Above an Infinite Plane", Proceedings of the Euronoise 2006, Tampere, Finland.
- [5] Ochmann Martin, Piscoya Rafael (2006), "Erweiterung der Quellsimulationstechnik auf Punktquellen mit komplexen Quellorten", Fortschritte der Akustik, DAGA 06, Braunschweig.
- [6] Ochmann Martin, Piscoya Rafael (2006), "The Source Simulation Technique with Complex Source Points for Computing Acoustic Radiation Problems", 13th International Congress on Sound and Vibration (ICSV13), Vienna, Austria
- [7] Piscoya Rafael, Ochmann Martin (2006), "Calculation of sound radiation using the equivalent source method with complex source points" in Vorbereitung.

Kontakt:

Dr. Ing. Rafael Piscoya
FB II Mathematik, Physik, Chemie
Technische Fachhochschule Berlin
Luxemburger Strasse 10
13353 Berlin
Tel.: (030) 4504 2804
E-mail: piscoya@tfh-berlin.de

Prof. Dr.-Ing. Martin Ochmann
FB II Mathematik, Physik, Chemie
Technische Fachhochschule Berlin
Luxemburger Strasse 10
13353 Berlin
Tel.: (030) 4504 2931
E-mail: ochmann@tfh-berlin.de